TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 16

Espacios L^p

Introducción

Los espacios L^p tienen su origen en el estudio que realizó Hilbert, en el año 1906, del espacio de sucesiones de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones en ese espacio definió la distancia entre ellas de la siguiente manera:

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

De ese estudio y otros que le siguieron surgió el concepto de espacio de Hilbert; de manera más específica, generalizando el estudio de Hilbert se definió el espacio de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Lebesgue medibles y de cuadrado integrable. Más adelante, con los avances que se tenían en la teoría de la medida, dado un espacio de medida $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \mu)$, se definió el espacio de funciones $f : (\mathbb{F}, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}$ tales que:

$$\int_{\mathbb{F}} f^2 d\mu < \infty$$

Se demostró que si se define la distancia entre dos funciones f y g, en ese espacio, como $d(f,g) = \left(\int_{\mathbb{F}} (g-f)^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene un espacio métrico completo. Más aún, ese espacio de funciones forma un espacio vectorial en el cual se puede definir un producto interior el cual genera la distancia así definida. Se le denota a ese espacio por $L^2(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \mu)$.

Una vez definidos los espacios L^2, en el año 1910, Riesz generalizó la idea y definió los espacios L^p, para cualquier $p \geq 1$. Éstos ya no resultaron ser espacios vectoriales con producto interior, pero sí espacios vectoriales normados completos.

En la teoría de la probabilidad, los espacios L^p han resultado de mucha utilidad; particularmente los espacios L^2, debido a que la convergencia en L^p implica la convergencia en probabilidad y nos da otras propiedades importantes. En particular, en el Cálculo Estocástico, la integral estocástica se define como un límite en L^2.

Definición y propiedades básicas de los espacios L^p

En todo lo que sigue, asumimos que se tiene definido un espacio de medida $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \mu)$.

Para $p \in (0, \infty)$, denotaremos por $\mathcal{L}^p$ al conjunto de funciones medibles f tales que $\int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu < \infty$. También, denotaremos por $\mathcal{L}^\infty$ al conjunto de funciones medibles y acotadas excepto a lo más en un conjunto de medida cero.

Obsérvese que si $f \in \mathcal{L}^p$, entonces f es finita casi en todas partes.

Para $p \in (0, \infty]$, el conjunto de clases de equivalencia en las cuales queda partido L^p, mediante la relación de equivalencia definida por la igualdad casi en todas partes, será denotado por L^p.

Cada elemento de L^p es un conjunto de funciones con la propiedad de que cualquier par de ellas son iguales casi en todas partes.

Si $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$, la notación $f \in L^p$ significará que la clase de equivalencia de la cual forma parte f, pertenece a L^p, de manera que cualquier propiedad que se demuestre para f será en realidad una propiedad de la clase de equivalencia de la cual forma parte.

Si $f \in L^\infty$, diremos que $M \in \mathbb{R}$ es cota esencial de f si $|f| \leq M$ casi en todas partes. Además, definimos el supremo esencial de f, $\sup es\,(f)$, de la siguiente manera:

$$\sup es\,(f) = \text{ínf}\,\{M \in \mathbb{R} : M \text{ es cota esencial de } f\}$$

Obsérvese que si $f \in L^\infty$, entonces $|f| \leq \sup es\,(f)$ casi en todas partes. Además, no hay ningún número real M menor que $\sup es\,(f)$ y tal que $|f| \leq M$ casi en todas partes. Es decir, si $|f| \leq M$ casi en todas partes, entonces $\sup es\,(f) \leq M$.

Si $p \in [1, \infty)$ y $f \in L^p$, definimos:

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p \in (0, 1)$ y $f \in L^p$, definimos:

$$||f||_p = \int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu$$

Si $f \in L^\infty$, definimos:

$$||f||_\infty = \sup es\,(|f|)$$

Vamos a demostrar que, en cada caso, con las normas así definidas, L^p es un espacio vectorial normado completo.

Obsérvese que se tienen las siguientes relaciones:

1. Si $p \in (0,1]$, entonces $y < y^p$ si $y \in (0,1)$ y $y > y^p$ si $y \in (1,\infty)$.

2. Si $p \in (1,\infty)$, entonces $y > y^p$ si $y \in (0,1)$ y $y < y^p$ si $y \in (1,\infty)$.

3. Para cualquier $p \in (0,\infty)$, la función $y \mapsto y^p$ es creciente en el intervalo $[0,\infty)$.

4. Si $r > p > 0$, entonces $y^r < y^p$ para cualquier $y \in (0,1)$ y $y^r > y^p$ para cualquier $y \in (1,\infty)$. También $y^p < 1 + y^r$ para cualquier $y \in [0,\infty)$.

Lema 1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $p \in [0,\infty)$, entonces:*

$$|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right)$$

Demostración

$$|a+b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2\max\{|a|,|b|\})^p = 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right)$$

■

Proposición 1. *Para cualquier $p \in (0,\infty]$, L^p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración

Si $c \in \mathbb{R}$, es inmediato que si $f \in L^p$, entonces $cf \in L^p$.

Supongamos que $f, g \in L^p$, entonces, si $p \in [0,\infty)$, por el lema anterior, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \left(\int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |g|^p \, d\mu\right) < \infty$$

Así que $f + g \in L^p$.

Si $f, g \in L^\infty$, entonces, f y g son medibles y acotadas excepto a lo más en un conjunto de medida cero; por lo tanto, $f + g$ tiene la misma propiedad, así que $f + g \in L^\infty$.

Por lo tanto, en cualquier caso, L^p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Lema 2. *Sea* $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *y* $\lambda \in (0,1)$, *entonces:*

$$t^{\lambda} < \lambda t + (1-\lambda)$$

Demostración

Para $t \in (0,\infty)$, definamos $f(t) = \lambda t + (1-\lambda) - t^{\lambda}$.

Se tiene $f'(t) = \lambda\left(1 - t^{\lambda-1}\right)$ para cualquier $t \in (0,\infty)$. Así que $f'(t) \leq 0$ para $t \in (0,1]$ y $f'(t) \geq 0$ para $t \in [1,\infty)$. Por lo tanto, f es decreciente en el intervalo $(0,1]$ y creciente en el intervalo $[1,\infty)$. Se concluye entonces que, para cualquier $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $f(t) > f(1) = 0$, es decir, $\lambda t + (1-\lambda) > t^{\lambda}$.

$\blacksquare$

Corolario 1. *Sean* $p, q \in (1,\infty)$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *y* $\alpha, \beta \in [0,\infty)$. *Entonces:*

$$\alpha\beta \leq \tfrac{1}{p}\alpha^p + \tfrac{1}{q}\beta^q.$$

La iguadad se cumple si y sólo si $\alpha^p = \beta^q$.

Demostración

Aplicando el lema anterior con $t = \frac{\alpha^p}{\beta^q}$ y $\lambda = \frac{1}{p}$, se tiene:

$$\frac{\alpha}{\beta^{\frac{q}{p}}} < \frac{1}{p}\frac{\alpha^p}{\beta^q} + \frac{1}{q}$$

Así que:

$$\alpha < \frac{1}{p}\frac{\alpha^p}{\beta} + \frac{1}{q}\beta^{\frac{q}{p}} = \alpha < \frac{1}{p}\frac{\alpha^p}{\beta} + \frac{1}{q}\beta^{q\left(1-\frac{1}{q}\right)}$$

Por lo tanto:

$$\alpha\beta < \tfrac{1}{p}\alpha^p + \tfrac{1}{q}\beta^q$$

$\blacksquare$

Teorema 1 (**Desigualdad de Hölder**)**.** *Sean* $p, q \in [1,\infty]$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$ *y* $g \in L^q$, *entonces* $fg \in L^1$ *y:*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q$$

Demostración

Si $p, q \in (1, \infty)$, definamos $\alpha = \frac{|f|}{||f||_p}$ y $\beta = \frac{|g|}{||g||_q}$. Entonces:

$$\left| \frac{f}{||f||_p} \frac{g}{||g||_q} \right| = \alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q = \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\left(||f||_p\right)^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\left(||g||_q\right)^q}$$

Integrando, se obtiene:

$$\frac{1}{||f||_p ||g||_q} \int_{\mathbb{F}} |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |fg| \, d\mu \leq \sup es\,(f) \int_{\mathbb{F}} |f| \, d\mu = ||f||_1 \, ||g||_\infty$$

■

Teorema 2 (**Desigualdad de Minkowski**)**.** *Sea* $p \in [1, \infty]$ *y* $f, g \in L^p$*, entonces:*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Demostración

Para $p = 1$ se tiene:

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

Así que:

$$\int_{\mathbb{F}} |f + g| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f| \, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |g| \, d\mu$$

Si $p \in (1, \infty)$, se tiene:

$$\left[(f + g)^{p-1}\right]^q = (f + g)^{pq-q} = (f + g)^p$$

Así que $(f + g)^{p-1} \in \mathcal{L}^q$.

Por lo tanto:

$$\left|\left|(f + g)^{p-1}\right|\right|_q = \left(\int_{\mathbb{F}} |f + g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(||f + g||_p\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\int_{\mathbb{F}} |f + g|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f + g|^{p-1} |f + g| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu$$

$$\leq ||f||_p \left|\left|(f + g)^{p-1}\right|\right|_q + ||g||_p \left|\left|(f + g)^{p-1}\right|\right|_q$$

$$= \left(||f||_p + ||g||_p\right) \left(||f + g||_p\right)^{\frac{p}{q}}$$

Por lo tanto:

$$\left|\left|f+g\right|\right|_p \leq \left(\left|\left|f\right|\right|_p + \left|\left|g\right|\right|_p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left|\left|f+g\right|\right|_p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Así que:

$$\left(\left|\left|f+g\right|\right|_p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left|\left|f+g\right|\right|_p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\left|\left|f\right|\right|_p + \left|\left|g\right|\right|_p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$, se tiene $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \sup es\,(f) + \sup es\,(g)$ casi en todas partes, así que:

$$\left|\left|f+g\right|\right|_\infty = \sup es\,(f+g) \leq \sup es\,(f) + \sup es\,(g) = \left|\left|f\right|\right|_\infty + \left|\left|g\right|\right|_\infty \qquad \blacksquare$$

Corolario 2. *Para cualquier $p \in [1,\infty]$, la función $\left|\left|\bullet\right|\right|_p$, definida sobre L^p, es una norma.*

Obsérvese que sobre $\mathcal{L}^p$, la función $\left|\left|\bullet\right|\right|_p$ no es una norma, pero es únicamente una propiedad de la norma la que no se cumple, a saber, que si $\left|\left|f\right|\right|_p = 0$ entonces $f = 0$. Si $\left|\left|f\right|\right|_p = 0$, únicamente se puede afirmar que $f = 0$ casi en todas partes.

Si $p \in (0,1)$, la función $f \mapsto \left(\int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ no es una norma. Ni siquiera lo es la función $x \mapsto \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, definida sobre $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, si $x = (1,0)$ y $y = (0,1)$, se tiene:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1$$

Así que:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2 > \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Por lo tanto, no se satisface la desigualdad del triángulo.

Lema 3. *Sean $a, b \in [0,\infty)$ y $p \in (0,1)$, entonces:*

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

Demostración

Si $ab = 0$, o $a = b$, la desigualdad es obvia.

Supongamos $a, b \in (0, \infty)$.

Definamos $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f(t) = 1 + t^p - (1 + t)^p$$

Entonces, como $(1 + t)^{1-p} > t^{1-p}$ para cualquier $t > 0$,

$$f'(t) = pt^{p-1} - p(1 + t)^{p-1} > 0$$

para cualquier $t > 0$.

Así que f es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y, siendo continua en el intervalo $[0, \infty)$, se tiene:

$$f(t) \geq f(0) = 0$$

Es decir:

$$(1 + t)^p \leq 1 + t^p$$

para cualquier $t > 0$.

Por lo tanto:

$$(a + b)^p = a^p \left(1 + \tfrac{b}{a}\right)^p \leq a^p \left(1 + \left(\tfrac{b}{a}\right)^p\right) = a^p + b^p$$

$\blacksquare$

Teorema 3. *Para cualquier $p \in (0, 1)$, la función $||\bullet||_p$, definida sobre L^p, es una norma.*

Demostración

$||f + g||_p = \int_{\mathbb{F}} |f + g|^p \, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} (|f| + |g|)^p \, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |g|^p \, d\mu$

$= ||f||_p + ||g||_p$

$\blacksquare$

Proposición 2. *Supongamos que la medida μ es finita, entonces, para cualquier $r \in (0, \infty]$, si $f \in L^r$, entonces $f \in L^p$ para cualquier $p \in (0, r)$.*

Demostración

Para $r \in (0, \infty)$, se tiene $y^p < 1 + y^r$ para cualquier $x \in [0, \infty)$ y cualquier $p \in (0, r)$, así que:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu \leq \mu(\mathbb{F}) + \int_{\mathbb{F}} |f|^r \, d\mu$$

Si $f \in \mathcal{L}^{\infty}$, se tiene $|f| \leq ||f||_{\infty} < \infty$ casi en todas partes. Así que:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|^p \, d\mu \leq ||f||_{\infty}^p \, \mu(\mathbb{F}) < \infty \text{ para cualquier } p \in (0, \infty)$$

■

Si μ no es finita, el resultado anterior podría no ser válido. Por ejemplo, si $\mathbb{F} = [1, \infty)$, $\Im$ es la σ-álgebra formada por los conjuntos Lebesgue medibles y μ es la medida de Lebesgue, definamos $f : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ mediante la relación $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $f \in L^2$, pero $f \notin L^1$.

Proposición 3. *Supongamos que existe una colección infinita numerable de conjuntos ajenos A_n de medida finita y positiva. Entonces, la dimensión de L^p es infinita.*

Demostración

Obviamente las funciones I_{A_n} pertenecen a L^p y son linealmente independientes.

■

Definición 1. *Para $p \in (0, \infty]$, se dice que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones medibles converge en L^p a la función medible f si $f, f_n \in L^p$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y:*

$$\lim_{n \to \infty} ||f_n - f||_p = 0$$

Si éste es el caso, se escribirá $f_n \xrightarrow{L^p} f$

La convergencia en L^p tiene las propiedades comunes a la convergencia en cualquier espacio vectorial normado. En particular, si X es un espacio vectorial normado, sobre $\mathbb{R}$, con norma $\|\bullet\|$, se tiene lo siguiente:

1. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge x, entonces cualquier subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también converge a x.
2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X tales que $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \longrightarrow y$, entonces $x = y$.
3. Si $c \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X tales que $x_n \longrightarrow x$, entonces $cx_n \longrightarrow cx$.
4. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de elementos de X tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, entonces $x_n + y_n \longrightarrow x + y$.
5. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ es de Cauchy.
6. Si para cualquier sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por $y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, converge. Entonces X es completo.

Teorema 4. *Para cualquier $p \in (0, \infty]$, L^p, con la norma $||\bullet||_p$ es un espacio normado completo.*

Demostración

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^p tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_p$ converge y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Definamos:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$.

Para cada $x \in \mathbb{F}$, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente. Sea $g(x) = \text{lím}_{n\to\infty} g_n(x)$.

Por el lema de Fatou, se tiene:

para $p \in [1, \infty)$:

$\left(\int_{\mathbb{F}} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{lím}_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{F}} g_n^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

$= \text{lím}_{n\to\infty} ||\sum_{k=1}^{n} |f_k|||_p \leq \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_p < \infty$

Para $p \in (0, 1)$:

$\int_{\mathbb{F}} g^p d\mu \leq \text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} g_n^p d\mu = \text{lím}_{n\to\infty} ||\sum_{k=1}^{n} |f_k|||_p$

$\leq \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_p < \infty$

Así que, para cualquier $p \in (0, \infty)$, $g \in L^p$.

Además:

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq g$$

Así que $|f| \leq g$. En particular $f \in L^p$.

Por otra parte:

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k - f|^p \leq (|\sum_{k=1}^{n} f_k| + |f|)^p \leq (2g)^p$$

Así que, por el teorema de la convergencia dominada:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |\sum_{k=1}^{n} f_k - f|^p = \int_{\mathbb{F}} \text{lím}_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n} f_k - f|^p = 0$$

Si $p = \infty$, se tiene:

$$|f| = \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n} f_k| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_\infty < \infty$$

casi en todas partes.

Así que $f \in L^\infty$.

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N}^{\infty} ||f_k||_\infty < \varepsilon$. Entonces, para cualquier $n \geq N$, se tiene:

$$|f - \sum_{k=1}^{n} f_k| = \lim_{m\to\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_p$$

casi en todas partes.

Así que:

$$||\sum_{k=1}^{n} f_k - f||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_\infty < \varepsilon$$

Por lo tanto, en cualquier caso, la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en L^p. Así que L^p es completo.

■

Integrabilidad uniforme

En esta parte vamos a definir y caracterizar a los conjuntos de funciones que son uniformemente integrables, concepto que resulta de mucha utilidad ya que nos permite resultados más fuertes en relación a la convergencia de sucesiones de funciones integrables.

En esta sección asumiremos que la medida μ es finita.

Proposición 4. *Si f es una función medible no negativa, entonces:*

$$\int_{\mathbb{F}} f d\mu = \int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : f(y) > x\}\right) dx$$

Demostración

Consideremos primero una función simple no negativa φ con representación canónica $\varphi = \sum_{j=1}^m b_j I_{E_j}$.

En este caso, se tiene:

$\int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi(y) > x\}\right) dx = \int_0^\infty \sum_{\{j\in\{1,\ldots,m\}: b_j > x\}} \mu(E_j)\, dx$

$= \int_0^\infty \sum_{j=1}^m I_{[0,b_j)}(x)\mu(E_j)\, dx = \sum_{j=1}^m \int_0^\infty I_{[0,b_j)}(x)\mu(E_j)\, dx$

$= \sum_{j=1}^m b_j \mu(E_j) = \int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu.$

Consideremos ahora una sucesión no decreciente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{F}$ y, para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,\infty)$, definamos $g_n(x) = \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi_n(y) > x\}\right)$.

La sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente y $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : f(y) > x\}\right)$ para cualquier $x \in [0,\infty)$, así que, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene:

$\int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : f(y) > x\}\right) dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi_n(y) > x\}\right) dx$

$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi_n(y) > x\}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} \varphi_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu$

■

Teorema 5. *Si f es una función integrable, entonces la serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right)$$

converge.

Demostración

$\int_0^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx = \text{lím}_{n\to\infty} \int_0^{\infty} I_{[0,n)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

$= \text{lím}_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

$= \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

$I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) \leq I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right)$

Así que:

$\sum_{k=1}^{n} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) dx$

$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

Por lo tanto, tomando límites, se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) \leq \int_0^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu$$

■

Corolario 3. *Si f es una función integrable, entonces*

$$\text{lím}_{\alpha\to\infty} \mu\left[|f| > \alpha\right] = 0$$

Demostración

$$\text{lím}_{\alpha\to\infty} \mu\left[|f| > \alpha\right] = \text{lím}_{k\to\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) = 0$$

■

Teorema 6. *Una función medible f es integrable si y sólo si:*

$$\text{lím}_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu = 0$$

Demostración

Supongamos primero que f es integrable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$f_n = \begin{cases} |f| & \text{si } |f| \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.s y $|f_n| \leq |f|$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[|f|\leq n]} |f|\, d\mu$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[|f|>n]} |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu - \int_{[|f|\leq n]} |f|\, d\mu \right) = 0$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{[|f|>n]} |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$, entonces, si $\alpha \geq N$, se tiene:

$$\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \int_{[|f|>N]} |f|\, d\mu < \varepsilon$$

Así que, $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu = 0$.

Supongamos ahora que $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu = 0$. Entonces, tomando $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < 1$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu = \int_{[|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \alpha\mu\left([|f| \leq \alpha]\right) + 1 < \infty$$

■

Teorema 7. *Una función medible f es integrable si y sólo si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \delta$.*

Demostración

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Entonces, para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \delta$, se tiene:

$\int_A |f|\, d\mu = \int_{\{|f|\leq\alpha\}} I_A |f|\, d\mu + \int_{\{|f|>\alpha\}} I_A |f|\, d\mu$

$\leq \alpha \int_{\{|f|\leq\alpha\}} I_A d\mu + \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu$

$\leq \alpha \int_{\mathbb{F}} I_A d\mu + \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu$

$= \alpha\mu(A) + \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu < \varepsilon$

■

Definición 2 (Integrabilidad uniforme). *Se dice que una familia $\mathcal{H}$ de funciones medibles es uniformemente integrable si:*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup \left\{ \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H} \right\} = 0$$

Teorema 8. *Una familia $\mathcal{H}$ de funciones medibles es uniformemente integrable si y sólo si el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ está acotado y, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.*

Demostración

Supongamos primero que la familia $\mathcal{H}$ es uniformemente integrable.

Sea $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < 1$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$, se tiene entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu = \int_{[|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \alpha\mu(\mathbb{F}) + 1$$

Así que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ está acotado.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$, definamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ y consideremos un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$. Se tiene entonces:

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \int_{[|f|\leq\alpha]} I_A |f|\, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \alpha\mu(A) + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Inversamente, supongamos que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ está acotado y, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$. Definamos $\alpha_0 = \frac{1}{\delta} \sup\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ y tomemos $f \in \mathcal{H}$ y $\alpha \geq \alpha_0$. Se tiene entonces:

$$\mu([|f| > \alpha]) \leq \tfrac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu \leq \delta$$

Por lo tanto:

$$\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Así que:

$$\sup\left\{\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\} < \varepsilon$$

Es decir:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup\left\{\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\} = 0$$

■

Proposición 5. *Sea f una función medible e integrable, Γ un conjunto cualquiera y $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de funciones medibles tales que $|f_\gamma| \leq f$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, entonces la familia $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es uniformemente integrable.*

Demostración

Para cualquier $\gamma \in \Gamma$, se tiene:

$$\int_{[|f_\gamma|>\alpha]} |f_\gamma| \, d\mu \leq \int_{[|f_\gamma|>\alpha]} |f| \, d\mu \leq \int_{[|f|>\alpha]} |f| \, d\mu$$

Así que:

$$\text{lím}_{\alpha\to\infty} \sup \left\{ \int_{[|f_\gamma|>\alpha]} |f_\gamma| \, d\mu : \gamma \in \Gamma \right\} \leq \text{lím}_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f| \, d\mu = 0$$

■

Ahora viene el tercer teorema de convergencia de la integral. Es una generalización del teorema de la convergencia dominada ya que, de acuerdo con la proposición anterior, éste es un caso particular del siguiente resultado.

Teorema 9. *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una familia uniformemente integrable de funciones medibles tal que $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces f es integrable y:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Demostración

Sea $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f_n|>\alpha]} |f_n| \, d\mu < 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n| \, d\mu = \int_{[|f|\leq\alpha]} |f_n| \, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f_n| \, d\mu \leq \alpha\mu\left([|f_n| \leq \alpha]\right) + 1 \leq \alpha\mu\left(\mathbb{F}\right) + 1$$

Por lo tanto, por el lema de Fatou, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f| \, d\mu = \int_{\mathbb{F}} \text{lím} \, |f_n| \, d\mu \leq \text{lím}\,\text{ínf}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n| \, d\mu \leq \alpha\mu\left(\mathbb{F}\right) + 1 < \infty$$

Así que f es integrable.

Para cada $\alpha > 0$, definamos:

$$f_n^{(\alpha)} = \begin{cases} f_n & \text{si } |f_n| \leq \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f^{(\alpha)} = \begin{cases} f & \text{si } |f| \leq \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $C = \{x \in \mathbb{F} : \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$.

Si $x \in C$ es tal que $|f(x)| < \alpha$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}(x)$. Así que, si $\mu([|f| = \alpha]) = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$ c.s y, como $\left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| \leq 2\alpha$, se tiene, por el teorema de la convergencia dominada:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu = 0$$

Por otra parte:

$$\int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu = \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f_n - f|\, d\mu$$

$$+ \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f_n - f|\, d\mu$$

$$\leq \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$+ \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$+ \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha]} |f_n|\, d\mu$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea α_0 tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \varepsilon$ y $\int_{[|f_n|>\alpha]} |f_n|\, d\mu < \varepsilon$, para cualquier $\alpha \geq \alpha_0$, entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu + 2\varepsilon$$

para cualquier $\alpha \geq \alpha_0$.

Sea $\alpha \geq \alpha_0$ tal que $\mu([|f| = \alpha]) = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu \leq 2\varepsilon$$

Así que, como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

■

Corolario 4 (Teorema de la convergencia uniformemente integrable). *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una familia uniformemente integrable de funciones medibles tales que $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es integrable y:*

$$\int_{\mathbb{F}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu$$

Tenemos un inverso del teorema 9:

Teorema 10. *Sean $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables y f una función medible tales que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$. Entonces la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.*

Demostración

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu < 1$, entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_N|\, d\mu < \infty$$

Así que f es integrable.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $n > N$, se tiene entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu < \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu + \max\left\{\int_{\mathbb{F}} |f_1 - f|\, d\mu, \dots, \int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Así que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado.

Tomemos ahora $\delta > 0$ tal que $\max\left\{\int_A |f|\, d\mu, \int_A |f_1|\, d\mu, \dots, \int_A |f_N|\, d\mu\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \delta$. Entonces, si $\mu(A) < \delta$ y $n > N$, se tiene:

$$\int_A |f_n|\, d\mu \leq \int_A |f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu < \varepsilon$$

■

Teorema 11. *Sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables no negativas tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$.*

Demostración

La sucesión $\{\min(f_n, f)\}_{n\in N}$ está acotada por f y converge puntualmente a f excepto a lo más en un conjunto de medida cero, así que, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} \min(f_n, f)\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu$. Por lo tanto:

$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} \max(f_n, f)\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} [f_n + f - \min(f_n, f)]\, d\mu$

$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} f_n d\mu + \int_{\mathbb{F}} f d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} \min(f_n, f)\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu.$

Así que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} [\max(f_n, f) - \min(f_n, f)]\, d\mu = 0$$

■

Corolario 5. *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables no negativas tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$. Entonces la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.*

Combinando los teoremas 9, 10, y 11 y el corolario 4, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 12. *Sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables tales que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

1. La familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.

2. $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$

3. $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu < \infty$

Demostración

Si la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, entonces, por el teorema 9, se tiene $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$. Así que la primera condición implica la segunda.

Si $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$, entonces, por el teorema 10, la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable. Así que la segunda condición implica la primera.

Si $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu < \infty$, entonces, por el teorema 11, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Así que la tercera condición implica la segunda.

Si la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, entonces la familia $\{|f_n| : n \in \mathbb{N}\}$ también es uniformemente integrable, así que, por el corolario 4, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu < \infty$$

Por lo tanto, la primera condición implica la tercera. ■

Corolario 6. *Sea* $\{f_n\}_{n\in N}$ *una sucesión de funciones integrables no negativas tales que* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

1. La familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es uniformemente integrable.*

2. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$

3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$

Teorema 13. *Sea* $\mathcal{H}$ *una familia de funciones medibles uniformemente integrable. Entonces la familia:*

$\mathcal{G} = \Big\{ f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}^+$: *Existe una sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones en* $\mathcal{H}$ *tales que*

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *excepto a lo más en un conjunto de medida cero*$\}$

es uniformemente integrable.

Demostración

Primero observemos que si $A \in \mathcal{F}$, entonces la familia de funciones $\mathcal{H}' = \{fI_A : f \in \mathcal{H}\}$ es uniformemente integrable.

Sea M una cota del conjunto $\left\{ \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H} \right\}$.

Sea $f \in \mathcal{G}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces, por la proposición 9, f es integrable y:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu < 1$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_N|\, d\mu < 1 + M$$

Así que la familia $\left\{ \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{G} \right\}$ está acotada.

Ahora, dada cualquier $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.

Si $f \in \mathcal{G}$, sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n I_A = f I_A$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, así que, por la proposición 9:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{A}} |f_n - f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n I_A - f I_A|\, d\mu = 0$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{A}} |f_N - f| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Entonces:

$$\int_{\mathbb{A}} |f| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{A}} |f_N - f| \, d\mu + \int_{\mathbb{A}} |f_N| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Así que, por la proposición 8, $\mathcal{G}$ es uniformemente integrable.

$\blacksquare$

Consideremos ahora un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$**.**

Proposición 6. *Si* Y *una variable aleatoria integrable, la familia:*

$$\mathcal{H} = \{E[Y \mid \mathcal{G}] : \mathcal{G} \text{ es sub } \sigma\text{-álgebra de } \Im\}$$

es uniformemente integrable.

Demostración

Si $\mathcal{G}$ es una subσ-álgebra de $\Im$, definamos $Y_{\mathcal{G}} = E[Y \mid \mathcal{G}]$.

Se tiene $|Y_{\mathcal{G}}| = |E[Y \mid \mathcal{G}]| \leq E[|Y| \mid \mathcal{G}]$. Así que, para $\alpha > 0$, se tiene:

$$\int_{[|Y_{\mathcal{G}}|>\alpha]} |Y_{\mathcal{G}}| \, dP \leq \int_{[|Y_{\mathcal{G}}|>\alpha]} E[|Y| \mid \mathcal{G}] \, dP = \int_{[|Y_{\mathcal{G}}|>\alpha]} |Y| \, dP$$

$$P[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha] \leq \frac{1}{\alpha} E[|Y_{\mathcal{G}}|] \leq \frac{1}{\alpha} E[E[|Y| \mid \mathcal{G}]] = \frac{1}{\alpha} E|Y|$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\int_A |Y| \, dP < \varepsilon$ para cualquier conjunto $A \in \Im$ tal que $\mu(A) < \delta$. Tomando $\alpha > \frac{1}{\delta} E|Y|$, se tiene $P[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha] < \delta$, así que:

$$\int_{[|Y_{\mathcal{G}}|>\alpha]} |Y_{\mathcal{G}}| \, dP \leq \int_{[|Y_{\mathcal{G}}|>\alpha]} |Y| \, dP < \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{\alpha \to \infty} \sup \left\{ \int_{[|Y_{\mathcal{G}}|>\alpha]} |Y_{\mathcal{G}}| \, dP : \mathcal{G} \text{ es sub}\sigma\text{-álgebra de } \Im \right\} = 0$$

$\blacksquare$